FACIT

Några uppgifter om produktregeln och kedjeregeln

Uppgifterna är tänkta att lösas utan miniräknare

1. Bestäm $f'(x)$ om

Produktregeln

a) $f(x) = 3\sin(x)\cdot\cos(x) + \sin(3x)$

$3\cos(x)\cdot\cos(x) + 3\sin(x)\cdot(-\sin(x)) + 3\cos(3x)$

$= 3\cos^2(x) - 3\sin^2(x) + 3\cos(3x)$

b) $f(x) = e^x\cdot(4-x^2)$ Produktregeln

$e^x\cdot(4-x^2) + e^x\cdot(-2x) = e^x(-x^2-2x+4)$

c) $f(x) = \cos^2(3x) = (\cos(3x))^2$ kedjeregeln

$2\cdot\cos(3x)\cdot(-\sin(3x))\cdot 3 = -6\sin(3x)\cdot\cos(3x)$

d) $f(x) = x(2-x^3)^4$ produktregeln

$1\cdot(2-x^3)^4 + x\cdot 4\cdot(2-x^3)^3\cdot(-3x^2) =$

$= (2-x^3)^4 - 12x^3\cdot(2-x^3)^3$

2. Visa att derivatan av $f(x) = x^3$ är $f'(x) = 3x^2$ med hjälp av **produktregeln**

$f(x) = x^3 = x\cdot x\cdot x$

$f'(x) = 1\cdot x\cdot x + x\cdot 1\cdot x + x\cdot x\cdot 1$

$= x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$

3. Vissa funktioner kan deriveras med både kedjeregeln och produktregeln.

a) Visa att funktionen $f(x) = \sin^3(x)$ är en sådan genom att härleda derivatan med hjälp av båda reglerna.

Kedjeregeln: $f(x) = (\sin(x))^3$

$f'(x) = 3\cdot(\sin(x))^2\cdot\cos(x)$

Produktregeln: $f(x) = \sin(x)\cdot\sin(x)\cdot\sin(x)$

$f'(x) = \cos(x)\cdot\sin^2(x) + \cos(x)\cdot\sin^2(x) + \cos(x)\cdot\sin^2(x)$

$= 3\sin^2(x)\cdot\cos(x)$

b) Visa att oavsett hur funktionen f ser ut så kommer funktionen $g = f^3$ att vara en funktion där derivatan kan fås med både produktregeln och kedjeregeln.

Kedjeregeln: $g = f^3$

$g' = 3\cdot f\cdot f'$

Produktregeln: $g = f\cdot f\cdot f$

$g' = f'\cdot f\cdot f + f\cdot f'\cdot f + f\cdot f\cdot f'$

$= 3\cdot f^2\cdot f'$

4. Bestäm $f'(x)$ om

Produktregeln

a) $f(x) = 5x(4 - x^3)^2$

$f'(x) = 5 \cdot (4-x^3)^2 + 5x \cdot 2(4-x^3)\cdot(-3x^2) = 5(4-x^3)^2 - 30x^3(4-x^3)$

b) $f(x) = e^x \cdot \sin(x) \cdot (x^2 - 2x)$

Produktregeln m. 3 funktioner:

$f'(x) = e^x \cdot \sin(x) \cdot (x^2-2x) + e^x \cdot \cos(x) \cdot (x^2-2x) + e^x \cdot \sin(x) \cdot (2x-2)$

c) $f(x) = 2\left(\sin(x) \cdot e^{-x^2}\right)^3$

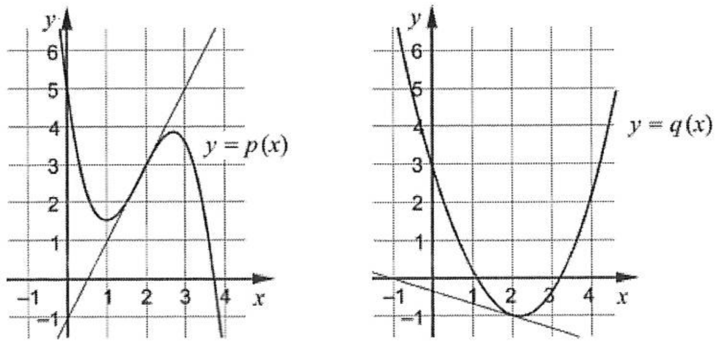
Kedjeregeln.

$f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot (\sin(x) \cdot e^{-x^2})^2 \cdot \left(\cos(x) \cdot e^{-x^2} + \sin(x) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)\right)$

Inre derivatan är en produkt.

5. Lös nedanstående uppgift ifrån ett gammalt nationellt prov:

Figurerna visar kurvorna $y = p(x)$ och $y = q(x)$ samt tangenterna till dessa för $x = 2$



Låt $r(x) = p(x) \cdot q(x)$ och bestäm $r'(2)$. (0/0/2)

Produktregeln: $r'(2) = p'(2) \cdot q(2) + p(2) \cdot q'(2) =$

Graferna: $p(2) = 3$ $p'(2) = 2$ $q(2) = -1$ $q'(2) = -\frac{1}{3}$

$= 2 \cdot (-1) + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -2 - 1 = -3$

6. Bestäm en *primitiv funktion* till

a) $f(x) = x(5x^2 + 4)^3$

Kedjeregeln baklänges!

Testa med $(5x^2+4)^4$

Då blir f' $4 \cdot (5x^2+4)^3 \cdot 10x = 40x(5x^2+4)^3$

Rätt svar: $\frac{1}{40}(5x^2+4)^4$

b) $g(x) = -x^2 e^{x^3}$

Testa med e^{x^3} Då blir f': $e^{x^3} \cdot 3x^2$

Rätt svar: $-\frac{1}{3} e^{x^3}$

c) $h(x) = e^{4x}(4\sin(x) + \cos(x)) = 4e^{4x} \cdot \sin(x) + e^{4x} \cdot \cos(x)$

Prod. regeln baklänges.

$H(x) = e^{4x} \cdot \sin(x)$